TABĂRA JUDEȚEANĂ-CONCURS,
pentru elevii olimpici la matematică, ediția a XIII-a 2023,
Târgu Lăpuș, 26.08.2023-01.09.2023
Clasa a VI-a

1. a. Determinați mulțimile A și B de numere naturale care îndeplinesc simultan condițiile:

i) $A\backslash B = \{0,8\}$;
ii) $B\backslash A = \{2,7\}$;
iii) $card(A \cap B) = 3$;
iv) suma elementelor mulțimii $A \cup B$ este 29.

b. Arătați că oricum am alege 7 numere naturale pătrate perfecte există cel puțin două a căror diferență se divide cu 10.

2. Determinați numerele naturale a, b, c pentru care

$$\frac{a+b}{2} + \frac{a^2+b^2}{2} = \frac{9c+1}{c+1}.$$

3. Triunghiurile ABC *și* DBC au vârfurile A și D situate în semiplane opuse determinate de dreapta BC, iar M și N sunt mijloacele laturilor AC, respectiv DC. Dacă $BM \equiv BN$ și $CM \equiv CN$, demonstrați că $\Delta ABC \equiv \Delta DBC$ și $MN \perp BC$.

Notă: Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7.
Timp de lucru: 2 ore

TABĂRA JUDEȚEANĂ-CONCURS,
pentru elevii olimpici la matematică, ediția a XIII-a 2023,D
Târgu Lăpuș, 26.08.2023-01.09.2023
Clasa a VI-a
BAREM

1. a. Determinați mulțimile A și B de numere naturale care îndeplinesc simultan condițiile:
i) $A\backslash B=\{0,8\}$;
ii) $B\backslash A=\{2,7\}$;
iii) $card(A\cap B)=3$;
iv) suma elementelor mulțimii $A\cup B$ este 29.

b. Arătați că oricum am alege 7 numere naturale pătrate perfecte distincte există cel puțin două a căror diferență se divide prin 10.

Soluție :

a. din i) și ii) avem $0,8\in A; 0,8\notin B$ și $2,7\in B; 2,7\notin A$ **1p**
$0+8+2+7=17$, deci $a+b+c=12$, unde $A\cap B=\{a,b,c\}$...**1p**
$A=\{0,1,5,6,8\}, B=\{1,2,5,6,7\}$ sau $A=\{0,3,4,5,8\}, B=\{2,3,4,5,7\}$...................................**2p**

b. Ultima cifră a unui pătrat perfect poate fi 0,1,4,5,6 sau 9, deci 6 resturi posibile la împărțirea la 10..**1p**
Așadar, $n^2=10k+r, r\in\{0,1,4,5,6,9\}$. Cele 6 resturi sunt „cutiile” din *principiul cutiei*; având la dispoziție șapte pătrate perfecte și doar 6 cutii, obținem că cel puțin două vor da același rest la împărțirea la 10..**1p**
Fie acestea $a=10c_1+r, b=10c_2+r$, unde a,b – pătrate perfecte, $a>b$; $a-b=10(c_1-c_2)$, deci $10|a-b$..**1p**

2. Determinați numerele naturale a,b,c pentru care

$$\frac{a+b}{2}+\frac{a^2+b^2}{2}=\frac{9c+1}{c+1}.$$

Soluție :

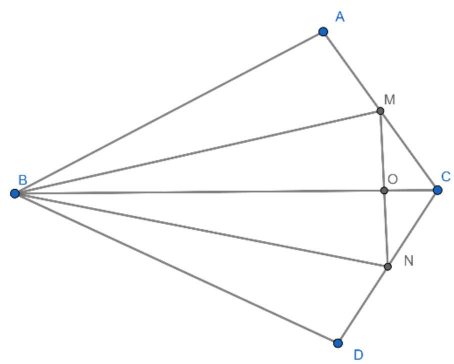
$$\frac{a+b+a^2+b^2}{2}=\frac{9c+1}{c+1}\Leftrightarrow \underbrace{\frac{a(a+1)+b(b+1)}{2}}_{\in\mathbb{N}}=\frac{9c+1}{c+1}$$ **2p**

$c+1|9c+1\Rightarrow c+1|9(c+1)-8\Rightarrow (c+1)|8$; $c+1\in\{1,2,4,8\}$ deci $c\in\{0,1,3,7\}$.................**1p**
$c=0\Rightarrow a+b+a^2+b^2=2$, deci $a^2\leq 2\Rightarrow a\in\{0,1\}$; $a=0, b=1$ *sau* $a=1, b=0$............**1p**
$c=1\Rightarrow a+b+a^2+b^2=10$, deci $a^2\leq 10\Rightarrow a\in\{0,1,2,3\}$; $a=0\Rightarrow b(b+1)=10$ nu convine;
$a=1\Rightarrow b(b+1)=8$ nu convine; $a=2\Rightarrow b(b+1)=4$ nu convine; $a=3\Rightarrow b(b+1)<0$ nu convine..**1p**
$c=3\Rightarrow a+b+a^2+b^2=14$, deci $a^2\leq 14\Rightarrow$ $a\in\{0,1,2,3\}$; convine $a=1, b=3$

sau $a = 3, b = 1$ **..1p**
$c = 7 \Longrightarrow a + b + a^2 + b^2 = 16 \Longrightarrow a^2 \leq 4 \Longrightarrow a \in \{0,1,2,3,4\}$ și nu se obțin soluții
$(a, b, c) \in \{(0,1,0), (1,0,0)(1,3,3), (3,1,3)\}$**..1p**

3. Triunghiurile ABC *și* DBC au vârfurile A și D situate în semiplane opuse determinate de dreapta BC, iar M și N sunt mijloacele laturilor AC, respectiv DC. Dacă $BM \equiv BN$ și $CM \equiv CN$, demonstrați că $\Delta ABC \equiv \Delta DBC$ și $MN \perp BC$.

Soluție :



$\Delta MBC \equiv \Delta NBC\ (LLL) \Longrightarrow \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle BCD$ ... **......................1p**
$MC \equiv CN, AM \equiv MC$ și $CN \equiv ND$, obținem $AC \equiv CD$**.........1p**
$\Delta ABC \equiv DBC(LUL)$**..2p**
Fie $\{O\} = BC \cap MN$, din $\Delta MBC \equiv \Delta NBC \Rightarrow \sphericalangle MBC \equiv \sphericalangle NBC$
$\Rightarrow \sphericalangle MBO \equiv \sphericalangle NBO$, atunci
$\Delta BMO \equiv \Delta BNO\left(L.U.L.\right) \Rightarrow \sphericalangle BOM \equiv \sphericalangle BON$ dar
$\sphericalangle BOM + \sphericalangle BON = 180^\circ$
Deci $\sphericalangle BOM = 90^\circ \Rightarrow MN \perp BC$ **...3p**